Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ATIVIDADES DE ESTUDO E INVESTIGAÇÃO PARA A CONSTRUÇÃO DE MODELOS DE PIRÂMIDES TRINGULARES

STUDY AND RESEARCH ACTIVITIES FOR THE CONSTRUCTION OF TRIANGULAR PYRAMID MODELS

Maria José Ferreira da Silva, Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil)
zeze@pucsp.br, saddoag@pucsp.br

Resumo
Neste artigo, os autores têm como objetivo fazer uma reflexão a respeito da razão de ser do ensino de planificação de superfícies de sólidos geométricos, para construção de modelos, partindo de um estudo matemático já realizado a fim de propor Atividades de Estudo e Investigação – AEI, no sentido de Chevallard. Este estudo, prioritariamente de cunho teórico, foca no significado que alunos do ensino básico poderão construir, especificamente, na construção do modelo para uma pirâmide triangular a partir da planificação de sua superfície. Para o desenvolvimento dessa reflexão, utilizamos o software Geogebra como ferramenta para a construção do modelo, por permitir a manipulação da construção geométrica realizada e levantar conjecturas e, ainda, a produção de modelos de diversos tipos. Por outro lado, possibilita ao professor ampliar discussões a respeito de planificações, tanto para outros conteúdos, como é o caso da medida de volumes, quanto para outros tipos de sólidos.

Palavras-chave: sólidos geométricos, modelos, planificação

Abstract
In this article, the authors aim to reflect on the *raison d'être* of the teaching of geometric solid surfaces planning, for the construction of models, starting from a mathematical study that has been already carried out in order to propose Study and Research Activities (AEI), in Chevallard's sense. This study, primarily of a theoretical nature, focuses on the meaning that primary school students can construct, specifically the construction of the model for a triangular pyramid from planning its surface. For the development of this reflection, we used GeoGebra software as a tool to construct the model, because it allows manipulating the geometric construction performed and raising conjectures, as well as producing models of various types. On the other hand, it allows the teacher to develop discussions about planning, both for other contents, as it is the case of volume measurement, and for other types of solids.

Keywords: geometric solids, models, planning

Introdução

Interessados nas questões do ensino de Geometria Espacial, em particular, naquelas que envolvem planificação de superfícies de sólidos geométricos, buscamos neste artigo, baseando-nos em Silva e Almouloud (2018), propor Atividades de Estudo e Investigação – AEI, no sentido de Chevallard (2002) para a construção de modelos de pirâmides triangulares. O citado artigo apresenta um estudo matemático do problema e, a partir dele, pretendemos desenvolver tais atividades com o objetivo de buscar uma razão de ser de tal conteúdo escolar. Quando falamos de razão de ser de um tema matemático, estamos buscando respostas para o "por quê" e "para que" tal conteúdo é ensinado. Para Gascón (2003), no ensino secundário espanhol (12 a 16 anos) não só desapareceu a razão de ser das questões temáticas, como também das diferentes áreas em que se divide a matemática escolar. Para o autor, o desempenho do aluno em problemas de geometria analítica melhoraria, significativamente, se, em lugar de treinarmos as técnicas analíticas, dedicássemos tempo para que os alunos traduzissem esses problemas para a geometria sintética e os resolvessem com suas próprias técnicas, como por exemplo, com régua e compasso. Nesse sentido, o desenho geométrico assume sua importância. De acordo com Costa e Rosa (2015, p. 67) "em meados do século XIX, o ensino do Desenho Geométrico também começou a ser difundido no Brasil, embora não fosse uma prática pedagógica utilizada em todas as escolas do país". Para Zuin (2001) esse ensino propicia compreensão e embasamento teórico para a geometria plana, tanto para professores quanto para alunos do ensino fundamental, acrescenta que "a compreensão de muitos conceitos geométricos se materializa através de construções geométricas" (p.16).

Voltando ao assunto que aqui será tratado, em termos dos níveis de codeterminação inferiores de Chevallard (2002), trataremos na disciplina Matemática, no domínio da Geometria, no sector Geometria Espacial a respeito do tema poliedros, considerando o assunto planificação de superfícies de poliedros. Do ponto de vista didático, ou seja, como ensinar tal conteúdo, optamos pelas AEI, dentro da Teoria Antropológica do Didático que envolvem o questionamento da matemática escolar sugerindo o paradigma de questionamento do mundo. Para tal, construímos em Silva e Almouloud (2018), um Modelo Epistemológico de Referência para a construção de modelos de pirâmides triangulares utilizando o Geogebra e, neste artigo, no sentido de complementar esse estudo, buscamos elaborar uma proposta didática para tal ensino a partir de três AEI. Essas AEI implicam na construção de uma rede de questões, a partir de uma inicial – geradora – que provoca uma rede de respostas até que o questionamento inicial seja respondido. Para que tais respostas sejam construídas é indispensável a utilização de construções geométricas com régua e compasso.

Assim, no desenvolvimento deste artigo, faremos um breve estudo a respeito da razão de ser para o ensino de Pirâmides no Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos), descreveremos do que trata o Atividades de Estudo e Investigação na Teoria Antropológica do Didático e apresentaremos, na sequência, nossa proposta didática alternativa e nossas considerações finais.

A razão de ser do ensino de Pirâmides no Ensino Médio

Um dos problemas discutidos em Gascón (2003) é a ignorância da razão de ser do estudo de uma questão matemática na escola básica, isto é, "por quê" e "para que" seu estudo na escola. Para o autor, há uma divisão entre o matemático e o pedagógico, pois na instituição escolar, o professor, no âmbito pedagógico, está sujeito ao matemático imposto pela instituição escolar via currículo, documentos oficiais e livros didáticos.

Olhando para o ensino de geometria espacial, nas orientações curriculares e livros didáticos, se vê que esse ensino apenas foca questões métricas (medidas de áreas e volumes) que implicam primordialmente na memorização de fórmulas. Silva e Almouloud (2018) afirmam que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002) orientam para a construção de modelos em geometria como uma forma de representar ou visualizar partes do mundo real a partir de desenhos, planificações e construções com instrumentos.

Com relação ao Currículo do Estado de São Paulo – Matemática (SÃO PAULO, 2012) encontramos a menção à palavra poliedros duas vezes. A primeira, na página 59, quando determinam os conteúdos e habilidades para o sétimo ano do Ensino Fundamental I em que Geometria deve ser trabalhada no segundo bimestre. Para poliedros, os alunos devem desenvolver as seguintes habilidades: "saber identificar poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista e saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais". A segunda, na página 68, quando determinam, da mesma forma, os conteúdos e habilidades para o segundo ano do Ensino Médio para serem trabalhados no quarto bimestre, cujas habilidades para poliedros são: " saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, medidas de áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos; o mesmo para a pirâmide e o cone". Não explicitam o que seriam diferentes contextos, o que conduz ao livro didático que, em um ou outro exemplo, buscam algum contexto para justificar o conteúdo. Procurando por planificação ou planificações nesse documento, encontramos na página 58, para o sexto ano do Ensino Fundamental, terceiro bimestre, em Geometria/Relações, no tópico relativo a formas espaciais, encontramos orientações para a construção das seguintes habilidades: "saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas" e "saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações." (SÃO PAULO, 2012, p. 58). Para esse nível de ensino, entendemos que seria impossível discutir as questões matemáticas para "saber planificar", o que conduz, quando ocorre, ao professor apresentar planificações prontas. Tal habilidade poderia estar no Ensino Médio, mas tal assunto não é tratado. Assim, nos parece que a razão de ser do ensino de poliedros seria o cálculo de medidas de comprimento, área e volume, pois é o que privilegia o livro didático.

Em uma busca não aprofundada em um livro de história da Matemática alguma menção à construção de modelos de poliedros ou sólidos, Eves (2004) afirma que Euclides (que viveu na primeira metade do século III a.C.) inicia um tratamento matemático para os poliedros regulares e, em seu livro XIII, inscreve esses poliedros em uma esfera, ou melhor em uma superfície esférica. Acrescenta que Platão (427-347 a.C.) em *Timeu* "apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos, para formar suas faces." (p. 114). Talvez aqui esteja a origem de, ainda hoje, algumas pessoas falarem que um cubo é formado por seis quadrados, o que o tornaria apenas uma superfície e não um sólido. O trabalho de Herão (segunda metade do século I d.C.) em *A Métrica*, livro II, dedica-se a mensuração de volumes cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides e outros, inclusive os poliedros regulares. Papus (final do século III d.C.) em sua *Coleção Matemática*, na quarta parte do livro II, volta à inscrição dos cinco poliedros regulares em uma esfera dada e no livro V trata de volumes de sólidos limitados por medidas de áreas iguais e atribui à Arquimedes a construção de trinta poliedros semirregulares. Luca Pacioli (c. 1445-1509) em *Summa de arithmetica*, utiliza álgebra para resolver problemas geométricos. Kepler (1571-1630) se interessou entre muitos outros assuntos a pavimentação de um plano com polígonos regulares e a preencher o espaço com poliedros regulares. No entanto, desde os primórdios, na antiguidade, surgiu a necessidade de armazenamento de líquidos e grãos, bem como de mensuração que foi suprida por artesãos. Só depois, surgiu uma primeira preocupação com o tratamento matemático para construção de sólidos geométricos e com o aprimoramento dos cálculos necessários para suas medidas.

Se ficamos apenas na reprodução de modelos na escola, as discussões matemáticas não aparecem. Para Gascón (2003), tratando da relação entre geometria sintética e geometria analítica as situações umbilicais da geometria elementar são as situações ligadas à determinação e construção de figuras geométricas, acrescenta que estas é que darão sentido ao estudo da geometria analítica.

Assim, pelo exposto entendemos que para planificar superfícies de sólidos temos que buscar estratégias de ensino que conduzam os estudantes a analisá-las matematicamente, como mostra Silva e Almouloud (2018) para as superfícies de pirâmides triangulares, e não apenas como manipulação de um modelo pronto apenas para percepção de forma e determinação de uma nomenclatura específica. Nesse sentido, escolhemos o Percurso de Ensino e Pesquisa para fazer uma sugestão didática para o ensino de tal planificação que apresentamos no que segue.

Atividade de Estudo e Investigação – AEI

Silva e Almouloud (2018), em análise das propostas da Base Nacional Comum Curricular e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, mostram que há certa preocupação em conduzir os alunos à investigação, no entanto não há maiores orientações a esse respeito. Para que isso ocorra é necessário conduzir os alunos, no nosso caso, do Ensino Médio, a interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, além de verificar as soluções propostas. ¿O professor deve então se perguntar "como fazer tal condução?" Considerando nosso tema, poliedros e nele o assunto planificação de superfícies de poliedros, há necessidade de os alunos serem colocados em uma situação de investigação. A noção de Atividade de Estudo e Investigação (AEI) é um modelo didático que, segundo Bosch e Gascón (2010, p. 77), retoma a Teoria das Situações Didáticas com a "proposta de reconstrução funcional dos conhecimentos matemáticos a partir de "situações fundamentais, cujo objetivo é situar a "razão de ser" ou o "sentido" de tais conhecimentos no centro do processo de estudo". Essa perspectiva deve, também, possibilitar a construção escolar de organizações matemáticas (OM) relativamente completas.

A noção AEI concentra-se em reformar os saberes e suas razões de ser, ela responde à necessidade de fazer viver um ensino baseado no estudo das questões atribuídas aos alunos e a busca de respostas sob a direção do professor, em classes ordinárias, isto é, local onde a matemática prescrita no currículo é ensinada sem a priori organizar um dispositivo de observação.

Para Bosch e Gascón (2010), o desenho de uma AEI tem início com a busca de uma "situação do mundo" que permita uma questão problemática e, por sua vez, a reconstrução de uma OM Local mediante os momentos de tal processo. "O primeiro encontro se estabelece por uma questão geratriz bruta Q, que deverá ser refinada pela comunidade de estudo, no momento exploratório as tentativas de respostas podem ser avaliadas pela própria comunidade, o que caracteriza a situação como adidática.

Chevallard (2002) afirma que a realização de uma AEI se desenvolve no sistema didático denotado por S (X; Y; Q) cuja finalidade é a produção de uma determinada resposta $R^♥$, o que é esquematizado por: [S (X; Y; Q) ➡ M] ➥ $R^♥$. Q é a questão estudada pelo coletivo X, (os alunos, por exemplo) sob a direção da equipe Y de ajuda ao estudo (o professor, por exemplo). $R^♥$ é a resposta do sistema didático $S(X$; Y; $Q)$, o que é indicado pela flecha encurvada descendente (➥). O pequeno coração (♥) colocado em expoente significa, de um lado, que a resposta produzida deve satisfazer certas condições e restrições especificas do projeto do qual o estudo de Q faz parte, e, por outo lado, esta resposta será a resposta à questão Q aceita pelo sistema $S(X$; Y ; $Q)$, pelo menos, até uma eventual retomada do estudo de Q, que poderia levar a substituir esta resposta por uma nova $R^♥$.

Para o autor, no processo do estudo de Q, diversos recursos podem ser mobilizados: os recursos que compõem o *milieu didático* ou *milieu para o estudo* (de Q), M, constituído notadamente do conjunto das ferramentas disponíveis na sala de aula para estudar a questão Q, produzir a resposta $R^♥$ e validá-la. A flecha encurvada ascendente (➦) indica que é o sistema didático S (X; Y; Q) que constitui e "fabrica" esse milieu. A composição do *milieu* M é descrita como o conjunto $R_1^◊$, $R_2^◊$, ..., $R_n^◊$, O_{n+1}, ..., O_m}, no qual $R_i^◊$ designa respostas institucionalmente carimbadas – o signo $^◊$, que lê « pinçona », tem por função lembrar essa carimbagem -, O_j *das obras.*

Para Matheron e Noirfalise (2007) "devolver aos alunos a responsabilidade de construir uma resposta a uma questão é sem dúvida necessária [...] tornar os alunos autores e não expectadores da matemática, mas isso é ainda insuficiente [...] é necessário colocar a questão da utilidade" (p. 6). Para os autores, "trata-se de desenvolver um percurso de estudo que permite cobrir parte dos setores ou domínios do programa de um ou vários níveis" (p. 6). Barachet, Demichel e Noirfalise (2007), em seu artigo a respeito de um estudo de triângulos, analisam as restrições que pesam sobre o ensino atual francês:

> restrições dentro da civilização e da história (tradição do estudo da geometria do triângulo dos gregos, por exemplo) ou da sociedade que pensa a organização de sua escola que repercutem primeiro nos níveis da pedagogia (aulas de uma hora convidando os alunos a serem "ativos") e da disciplina (presença ou ausência no programa de certos objetos matemáticos transpostos, abertura e fechamento do assunto ensinado em uma hora e consequências sobre a possibilidade de fazer os alunos encontrar razões para estudar). Essas restrições, por sua vez, induzem formas relativamente estáveis de ensino e de maneiras de pensar o estudo de matemática: corte, depois "confinamento" do ensino em temas (da ordem do capítulo) enfraquecendo a visão de sua articulação em organizações mais amplas, ritmo ternário (atividade, síntese, exercícios), ausência de recurso à mídias externas mínimas, fornecidas pelo professor e pela escola (o curso ou o manual, às vezes a calculadora), encaminhamento do estudo à esfera privada dos alunos fora da escola, etc. (Barachet, Demichel, Noirfalise, 2007, p. 6).

No entanto, reconhecem que na escola há grupos de professores reconhecidos, institucionalmente, como competentes que resistem e obstruem novos olhares para o ensino e, concluem, que "a profissão não possui ainda nem as ferramentas, nem o tempo, que permitam esse trabalho, sem evocar a consciência de sua urgente necessidade" (p. 7). Assim, os autores concebem, experimentam e observam proposições de AEI construídos a partir de questões problemáticas designados aos alunos a fim de desenvolver documentos para os professores, respeitando os conteúdos determinados nos currículos.

Não resta dúvida que essas restrições também pesam em nossas escolas e, como elas, nos desafiamos a propor uma alternativa para o conteúdo de planificações de superfícies de sólidos e para algumas orientações de documentos oficiais para que os alunos aceitem o papel de investigadores. Na proposta do ensino de poliedros podemos identificar alguns tipos de tarefas como: construir um modelo de sólido por planificação de sua superfície; determinar secções planas de sólidos e calcular a medida de grandezas geométricas, como comprimentos, áreas e volumes. Cada uma delas suscita a construção de uma Atividade de Estudo e Investigação que propomos no que segue.

AEI 1: Construção de um modelo para pirâmides triangulares de altura determinada

Para desenvolver uma AEI, temos que elaborar uma Organização Matemática Local e, para isso, nos basearemos no Modelo Epistemológico de Referência apresentado por Silva e Almouloud (2018). Uma possível Organização Matemática Local poderia ter como tipo de tarefa (T): construir planificações de superfícies de pirâmides de altura determinada, pois independente da superfície identificada, como base, temos o mesmo discurso tecnológico teórico para justificar a técnica.

Uma possível questão geratriz para essa atividade poderia ser: ¿Como construir um modelo para uma pirâmide triangular com uma altura determinada?

Propusemos a questão da altura para considerar alguma utilidade à construção, tendo em vista que o modelo para esse tipo de pirâmide é conhecido pelo aluno e, se não for, ele a encontra em livros ou na Internet, mas simplesmente para ser reproduzida sem qualquer questionamento matemático, a não ser a identificação de alguns de seus elementos.

Essa questão, que não tem resposta imediata, certamente suscitará outras perguntas, como por exemplo: ¿como se constrói um modelo para uma pirâmide triangular?

Um primeiro passo para responder essa questão seria o reconhecimento de propriedades das pirâmides e a observação do que deve ser considerado para projetar as faces no plano em que a base da pirâmide está contida. ¿O que temos que observar na pirâmide representada na figura 1 para poder planificar sua superfície? Ou seja, projetar as faces no mesmo plano da base.

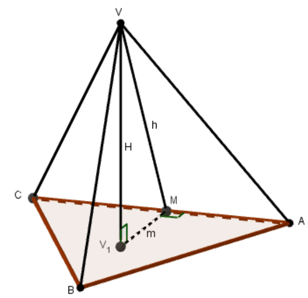

Figura 1 -Identificação de elementos de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Cabe observar que as respostas dadas a esta questão servirão de tecnologia para justificar a técnica de construção que será realizada para a planificação da superfície da pirâmide. Os alunos devem observar que a planificação solicitada consiste em relacionar quatro triângulos, que cada aresta, não contida na base, é formada por lados de mesma medida de duas faces consecutivas da pirâmide e, ainda, que essas arestas se interceptam no ponto V, que ao mesmo tempo coincide com vértices dos triângulos que representam as faces da pirâmide. Além disso, é necessário observar que o segmento que representa a altura da pirâmide juntamente com o que representa a altura de cada face formam o triângulo retângulo VMV_1 que indica que ao rebatermos, por exemplo, o triângulo ACV no mesmo plano da base os segmentos V_1M e MV estão contidos em uma reta perpendicular à aresta AC.

Então, como planificar a superfície de uma pirâmide triangular? Esse tipo de tarefa pode ser resolvido por uma técnica de construção geométrica que pode ser assim obtida. Dado um triângulo, ABC (figura 2), que representa a base da pirâmide, determinamos um ponto, V_1, para representar a projeção do vértice da pirâmide sobre o plano em que a base está contida. Pelo ponto V_1 traçamos retas perpendiculares (r, s, t) aos três lados do triângulo (BC, AB e AC, respectivamente). Na reta r tomamos um ponto D e traçamos uma circunferência com centro em C e raio CD que determina na reta t, o ponto E. Com centro em A traçamos a circunferência de raio AE que determina na reta s o ponto F. Traçamos então os triângulos BCD, ABF e ACE para completar a planificação da superfície de uma pirâmide triangular que permite a construção de um modelo para tal objeto matemático. Se a construção for feita no Geogebra a manipulação do triângulo ABC e do ponto V_1 permite outras formas para o modelo, já a impressão permite a construção física do modelo.

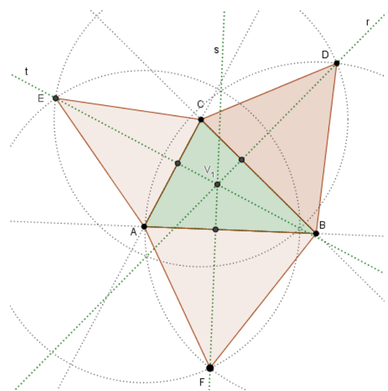

Figura 2 – Construção da planificação da superfície de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

A tecnologia que justifica essa técnica baseia-se nas propriedades de uma pirâmide triangular realizado no questionamento anterior e a teoria que justifica tal tecnologia se encontra na geometria espacial, que estuda os objetos definidos em um espaço tridimensional e objetos que não estão contidos em planos: superfícies (planos e superfícies curvas) e sólidos .
Após essa construção cabem questionamentos do tipo: quais posições a projeção do vértice da pirâmide pode ocupar em relação à base da pirâmide? Qual a relação dessas posições com o tipo de modelo que a planificação pode proporcionar? Os alunos devem perceber que o ponto V_1, pode pertencer ao interior ou exterior da superfície triangular que representa a base da pirâmide ou a uma de suas arestas. Esses resultados permitirão os modelos representados na figura 3, ou seja, a altura da pirâmide pode estar no interior ou exterior de sua região ou, ainda, coincidir com a altura de uma das faces laterais.

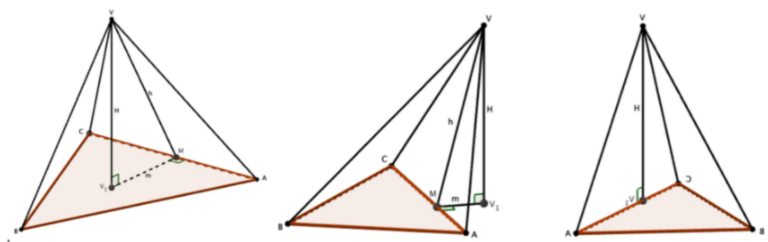

Figura 3 – Posições da altura de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Mas, a questão inicial ainda está por responder: ¿como podemos determinar a altura da pirâmide se ela não é explicitada na planificação? Para buscar respostas, podemos propor a seguinte tarefa: construir um modelo para uma pirâmide triangular de altura 6 cm. A técnica para essa construção é determinar um triângulo *ABC*, que representa a base da pirâmide, e um ponto V_1 (figura 4) que representa a projeção do vértice da pirâmide no plano da base. Traçar por V_1 uma reta *r*, perpendicular ao lado *BC*, que determina neste o ponto *M*. Depois traçar por V_1 uma reta *s*, perpendicular à reta *r*. Traçar a circunferência de centro em V_1 e raio 6 cm, que determina na reta *s* o ponto *P* e o triângulo V_1PM em que o lado *PM* representa a altura da face *CBD*. A circunferência de centro em *M* e raio *MP* determina na reta r o ponto *D*. A partir daí a construção continua como feito anteriormente. Essa técnica pode ser justificada pela observação do triângulo VMV_1, na figura 1, e perceber que a altura de cada superfície triangular que representa uma face lateral depende da altura da pirâmide.

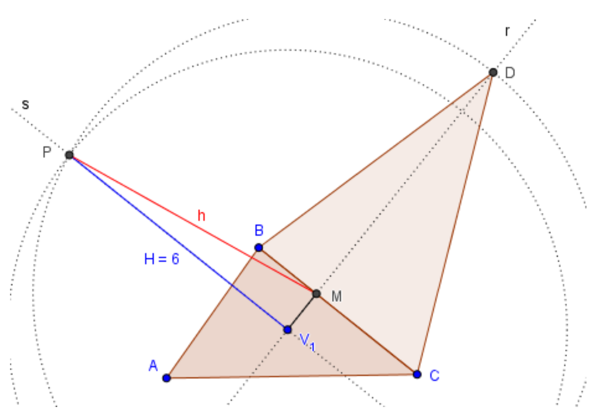

Figura 4 – Construção da altura dada para uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Outras questões podem ser lançadas, como por exemplo: é possível construir o modelo de uma pirâmide triangular com altura de 6 cm, ¿cuja base é representada por um triângulo equilátero de lado medindo 6 cm e a projeção do vértice da pirâmide coincide com o centro do triângulo?

AEI 2: Construção de um modelo para troncos de pirâmides triangulares, ambas com altura determinada

Um outro conteúdo tratado no ensino é tronco de pirâmides com o fim apenas da memorização de uma fórmula para o cálculo de seu volume. No entanto, depois de trabalhar a primeira AEI é possível lançar uma nova questão: ¿é possível construir o modelo para um tronco de uma pirâmide triangular? A tarefa seria então: construir um modelo para o tronco de uma pirâmide triangular. A primeira construção é a da planificação da superfície de uma pirâmide triangulas, como mostra a figura 2. Depois, essa técnica deve ser ampliada para a construção do tronco solicitado (figura 5), ou seja, determinar no lado BD um ponto G qualquer, depois traçar uma circunferência com centro em B e raio BG para determinar no lado BE o ponto G_1. Tomar um ponto H no lado CD e traçar a circunferência de centro em C e raio CH que determina no lado CF o ponto H_1. Finalmente, determinar o ponto I no lado AE e traçar a circunferência de centro em A e raio AI que determina no lado AF o ponto I_1. Para terminar a construção do modelo traçar os segmentos GG_1, HH_1 e II_1.

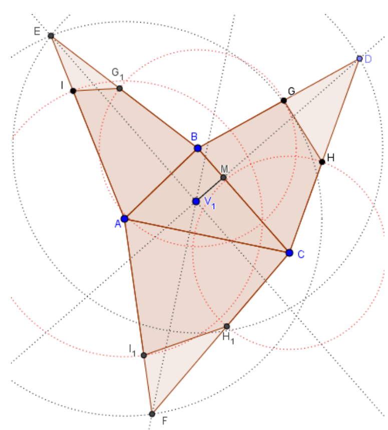

Figura 5 – Construção da planificação da superfície de um tronco de pirâmide triangular
Produção dos autores

O que justifica tal técnica é a determinação de um plano por três pontos (um em cada aresta da pirâmide que não sejam da base) e a necessidade de que as arestas de dois triângulos consecutivos devem ter mesma medida, ou seja, $\overline{BG} \equiv \overline{BG_1}$, $\overline{AI} \equiv \overline{AI_1}$ e $\overline{CH} \equiv \overline{CH_1}$.

Uma outra questão pode ser: ¿como construir o modelo para o tronco de uma pirâmide triangular de base equilátera de lado 6 cm, de altura 8 cm por um plano paralelo à base e a uma distância de 6 cm?

A técnica para cumprir esta tarefa, a partir da construção da planificação solicitada (figura 6), consiste em determinar o ponto H no segmento V_1G de tal forma que V_1H tenha 6 cm de comprimento.

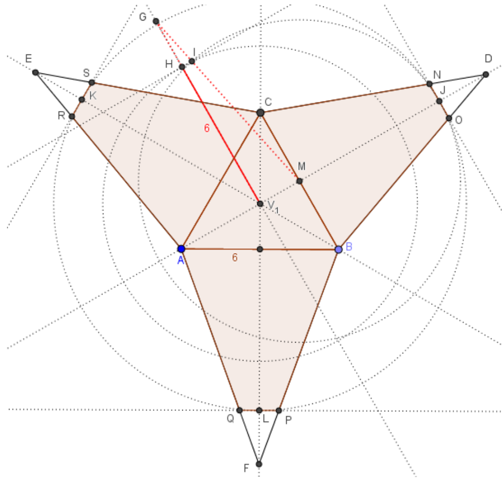

Figura 6 **-** Construção de outra planificação da superfície de um tronco de pirâmide triangular
Produção dos autores

A seguir traçar pelo ponto *H* uma reta paralela à reta V_1M que determina o ponto *I* no segmento *MG*. Traçar a circunferência de centro em *M* e raio *MI* para determinar o ponto *J*, no segmento que representa a altura do triângulo *CBD*. Traçar a circunferência com centro em V_1 e raio V_1J para determinar os pontos *K* e *L*. Traçar pelo ponto *J* uma reta paralela ao lado *CB* do triângulo da base que determina os pontos *N* e *O*, respectivamente, nos lados *CD* e *DB* do triângulo *DBC*. Traçar pelo ponto *K* uma reta paralela ao lado *AC* do triângulo da base que determina os pontos *R* e *S*, respectivamente nos lados *AE* e *CE* do triângulo *ACE*. Traçar a reta paralela ao lado *AB* do triângulo da base que determina os pontos *Q* e *P*, respectivamente nos lados *AF* e *BF* do triângulo *ABF*. Os quadriláteros *ABPQ*, *BCNO* e *ACSR* representam as laterais do tronco solicitado na tarefa.

A justificativa dessa técnica se dá pela percepção de que se tomarmos um ponto *H* no segmento que representa a altura da pirâmide e, por ele, passamos um plano paralelo ao plano da base, esse plano corta a altura do triângulo *BCV* no ponto *I* que é determinado pela construção de uma reta paralela ao segmento V_1M passando pelo ponto *H*. Para determinar os pontos em que o plano intercepta as arestas da pirâmide temos que traçar pelo ponto *I*, uma reta paralela ao lado *CB* que determina os pontos *N* e *O*, respectivamente, na aresta *VC* e *VB*. Traçando por *N* uma reta paralela ao lado *AC* obtemos o ponto *Q* na aresta *VA*.

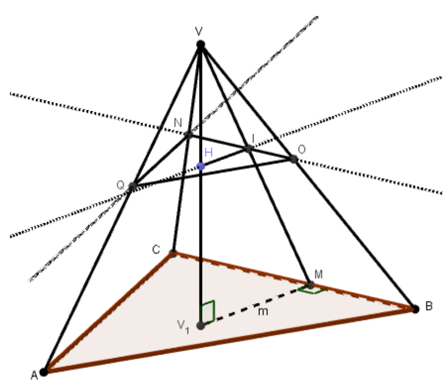

Figura 7 **–** Corte paralelo à base de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

AEI 3 - Construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tronco de pirâmide triangular

Supondo que os alunos já saibam calcular a medida do volume de uma pirâmide triangular, podemos propor a seguinte questão: como determinar uma fórmula para calcular a medida do volume de um tronco de pirâmide triangular, cuja base é equilátera, a partir de um plano paralelo ao plano da base e que tenha como altura a metade da altura da pirâmide? Para cumprir essa tarefa, temos que recorrer à Álgebra. Considerando que a medida do volume da pirâmide inicial seja representada por $V_P = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$, sendo V_P a medida do volume, A_B a medida da área do triângulo da base e H a medida da altura da pirâmide e a medida do volume da pirâmide que será truncada dada pela fórmula $V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, sendo V_p a medida do volume que será truncado, A_b a medida da área da superfície triangular do corte e h a medida de sua altura. Assim, podemos dizer que a medida do volume do tronco pode ser obtida por $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$. Mas, como a altura da medida da altura da pirâmide que será truncada tem a metade da medida da altura da pirâmide inicial, podemos escrever então que $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot H$ (1) considerando que se a base é representada por um triângulo equilátero a superfície do corte terá uma superfície com medida de área igual um quarto da medida da área da base da pirâmide inicial, isto é, $A_b = \frac{1}{4} \cdot A_B$ e que $h = \frac{1}{2} \cdot H$. Podemos voltar à fórmula (1) e determinar a fórmula equivalente $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$. Considerando que a altura da pirâmide que será truncada pode ser reduzida por um fator k qualquer, podemos generalizar a fórmula para $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H(1 - (k)^3)$.
Assim, encerramos a apresentação das três Atividades de Estudo e Investigação.

Considerações finais

Assumindo a possibilidade do ensino de planificações de superfícies de sólidos geométricos, como uma de suas formas de representação, tendo em vista que documentos oficiais orientam a construção de modelos, entre eles planificações e construções com instrumentos, decidimos apresentar um caminho alternativo à apresentação de planificações prontas.

Tal escolha envolve uma análise detalhada dos elementos e propriedades do sólido geométrico em questão e das relações que devem ser consideradas quando propomos planificar sua superfície. Essa análise desaparece quando simplesmente damos para os alunos um modelo já executado. Qual seria a razão de ensinar tal conteúdo? ¿Tal vez fazer uma embalagem? Este pode ser um motivo razoável visto que muitos professores pedem para que seus alunos tragam embalagens quando iniciam qualquer estudo de sólidos geométricos. No entanto, o aluno não desenvolve autonomia para, por si só, construir alguma de acordo com seus critérios. No caso de nosso sólido, a pirâmide de base triangular, por exemplo, não entende como fazer para que seu modelo tenha uma altura determinada.

Nossa proposta apresenta três Atividades de Estudo e Investigação que, com a ajuda do desenho geométrico com régua e compasso e do software GeoGebra permite discutir as relações que devem ser observadas para planificar a superfície de uma pirâmide triangular qualquer, de uma pirâmide desse tipo de altura determinada, da construção de planificações de troncos de pirâmides, além do desenvolvimento de uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume. Alguns podem argumentar que tais atividades consomem muito tempo para serem desenvolvidas, no entanto rebatemos que elas podem ser a base para o ensino de outros conteúdos do programa que poderiam ser tratados mais rapidamente e com reflexões concretas, como é o caso de outros sólidos geométricos e suas medidas de volume. Por exemplo, propor a questão: ¿como construir um modelo para uma pirâmide pentagonal de altura dada?

Quanto à utilização do GeoGebra ela se torna importante porque além de permitir a própria construção das hipóteses levantadas, seu dinamismo permite uma série de alterações que conduzem à diferentes modelos. Além disso, a impressão da planificação realizada respeita as medidas escolhidas e a construção física do modelo em questão, ou seja, o aluno efetivamente coloca à prova o que fez.

Não temos dúvida da importância do ensino de geometria na escola básica, mas ele não pode ser desenvolvido por regras e fórmulas memorizadas e de exercícios de treinamento para sua aplicação. Caso contrário, “é uma questão fechada em si mesma (ou morta) porque se ignora o *por quê* e o *para quê* de seu estudo escolar” (Gascon, 2004, p.41)

Referências bibliograficas

Barachet, F.; Demichel, Y.; Noirfalise, R.(2007). Activites d´etude et de recherche (ERA) pour dynamiser l´etude de la geometrie dans l´espace en classe de seconde. *Petit x*, 75, 34-49.

Bosch, M.; Gascón, J. (2010). Fundamentación de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. IUFM de l´Académie de Montpellier, 55-91.

Brasil, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC.

Chevallard, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d´être, fonctions, devenir. En Actes de *Journées de la commission inter-IREM Didactique* (pp. 1-26) Dijon, France.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.

Gacón, J. (2003). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometria en Secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometria. *SUMA 44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometria en Secundaria. II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA 45,* 41-52.

Matheron, Y.; Noirfalise, R. (2007). Une recherche de la Comission inter-IREM (CII) didatique soutenue par l´INRP: *“Dynamiser l´étude des mathématiques dans l´enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d´AER et de PER”.*

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. (2012). *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas tecnologias. 1.ed. atual. São Paulo: SE, 72 p.

Silva, M. J. F. da; Almouloud, S. A. (2018). Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. *Educação Matemática Pesquisa,* 20(3), 327-346, São Paulo.

Zuin, E. S. L. (2001) *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.